

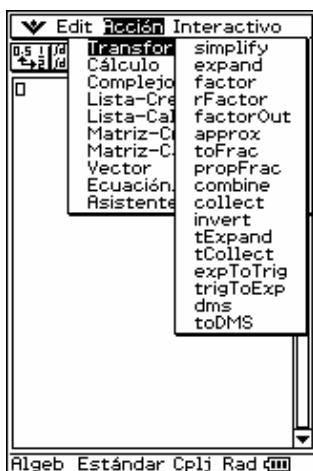
3.

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

APLICACIONES AL CÁLCULO

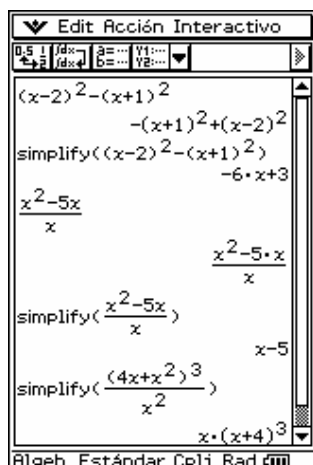
SIMPLIFICAR EXPRESIONES

Una vez abierto el menú **Acción** seleccionamos **Transformación** para acceder al siguiente menú:



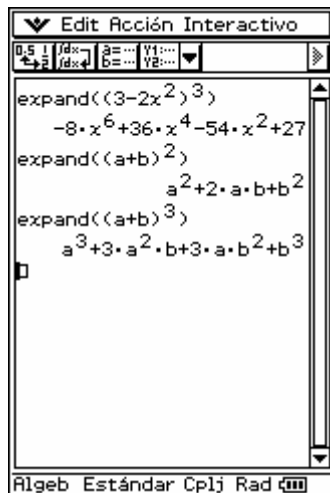
La primera función que encontramos es **simplify** cuyo significado es evidente, se utilizará para simplificar una expresión.

Esta función será necesaria ya que no siempre se obtiene una expresión más sencilla que corresponda a la simplificación automática como se puede observar en la imagen siguiente:



DESARROLLAR EXPRESIONES

Para desarrollar una expresión se utilizará la función **expand** disponible en el mismo menú anterior.



Para ordenar una expresión con respecto a una variable se utilizará la función **collect**.

La sintaxis de esta función es:

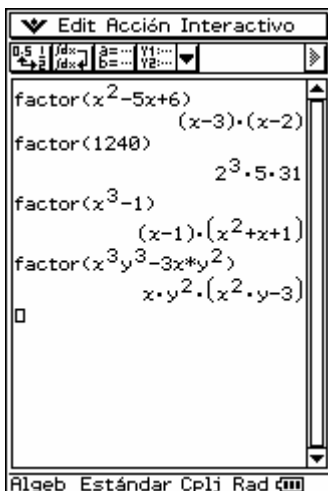
Collect(expresión, variable)

Cuando no se indica el segundo argumento tomará x como valor por defecto.

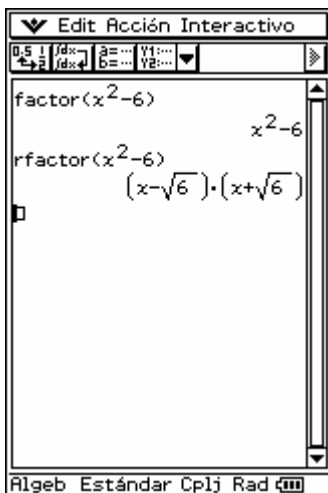


FACTORIZAR EXPRESIONES

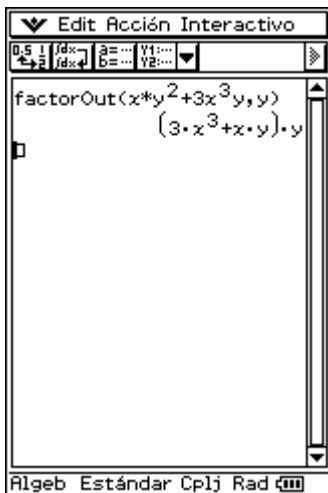
Para factorizar una expresión se utilizará la función **factor**.



La función **rFactor** disponible en el menú **Transformación** permite factorizar una expresión hasta sus raíces si las tiene.



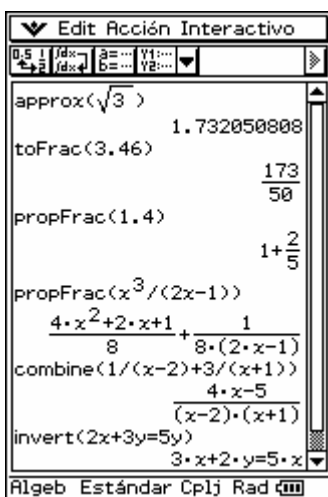
Además, la función **factorOut** permite incluir un segundo argumento para indicar el factor que se desea extraer en la expresión.



OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ TRANSFORMACIÓN

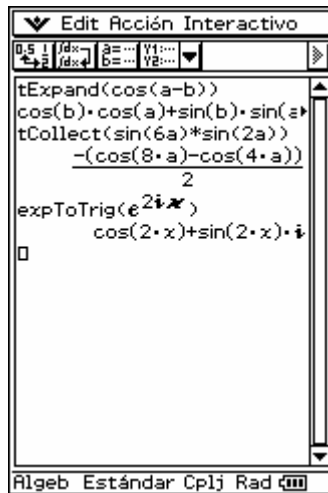
Además, en este menú encontramos las siguientes funciones:

- **approx**: transforma una expresión en una aproximación numérica.
- **toFrac**: transforma un valor decimal en su expresión fraccionaria.
- **propFrac**: transforma un valor decimal en su fracción propia equivalente. Puede aplicarse sobre una fracción algebraica.
- **combine**: reduce a común denominador una suma de fracciones.
- **invert**: invierte dos variables en una expresión.



Para realizar la simplificación de expresiones trigonométricas se podrán emplear las funciones:

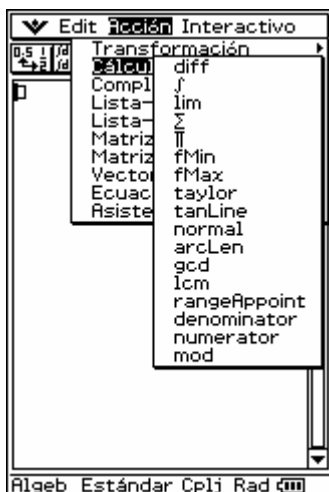
- **tExpand**: desarrolla una expresión trigonométrica utilizando las fórmulas de suma y diferencia.
- **tCollect**: transforma productos en sumas en una expresión trigonométrica.
- **ExpToTrig**: convierte una expresión exponencial en forma trigonométrica o hiperbólica.
- **TriToExp**: realiza la conversión inversa a la anterior.



También encontramos en este menú las funciones **dms** para transformar grados, minutos y segundos en una expresión y **toDMS** para realizar la conversión inversa.

APLICACIONES AL CÁLCULO

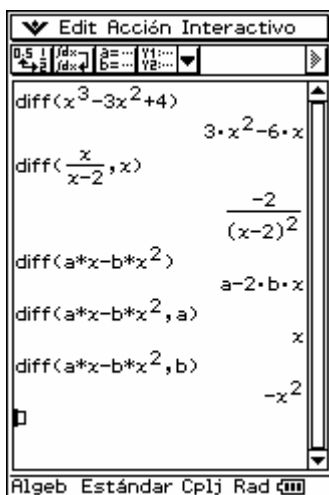
Derivadas, límites, integrales, sumas de series y otras aplicaciones de cálculo simbólico se realizarán a través de las funciones disponibles en el menú **Cálculo** disponible en la opción **Acción** del menú principal.



CÁLCULO DIFERENCIAL

Para calcular la función derivada de una función f se obtiene a partir de la función **diff**, cuya sintaxis es:

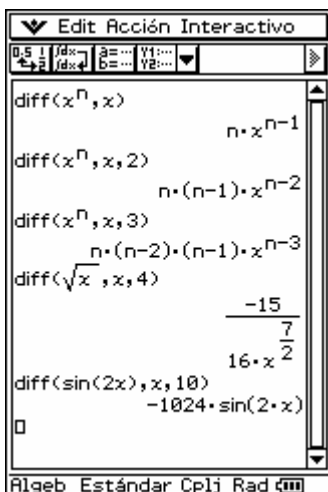
diff(función, variable)



Como se observa en la imagen anterior, al omitir la variable, la calculadora asume x como valor por defecto.

Esta misma función se utilizará para obtener derivadas de una función de orden mayor que 1.

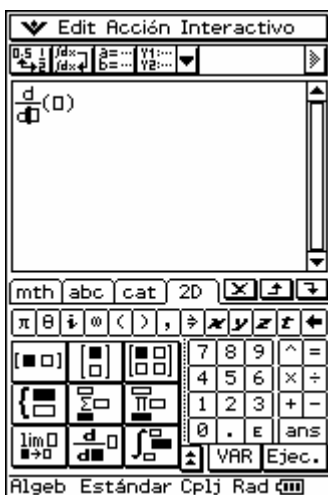
diff(función, variable, orden)



Si se añade un nuevo argumento, se obtendrá el valor de la derivada en el punto indicado:

diff(función, variable, orden, punto)

Quizás resulte más sencillo utilizar las opciones que ofrece el teclado **2D** para escribir la función y argumentos anteriores.



CÁLCULO INTEGRAL

Tanto para calcular integrales indefinidas como definidas utilizaremos la función \int cuya sintaxis es:

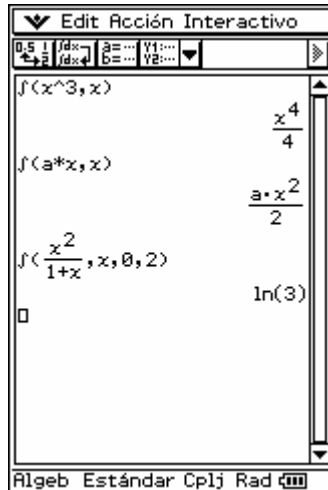
$$\int (\text{función, variable})$$

para calcular una integral indefinida, e

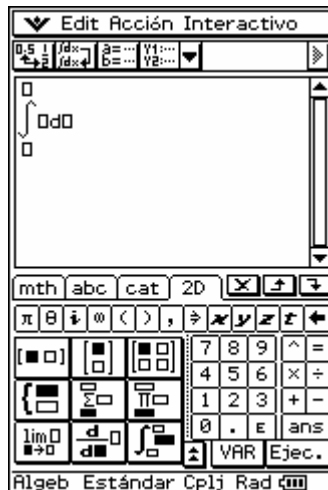
$$\int \text{(función, variable, extremo inferior, extremo superior)}$$

para hallar una integral definida.

Además, se podrá incluir un argumento más para indicar el error admitido al calcular una integral definida.



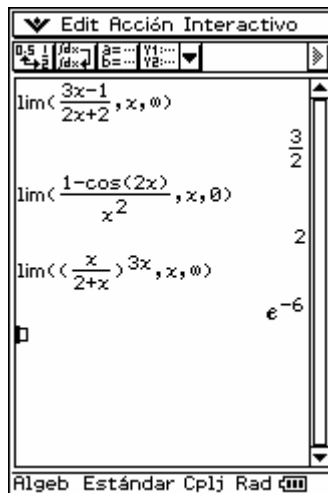
Estas opciones también están disponibles en el teclado **2D**.



CÁLCULO DE LÍMITES

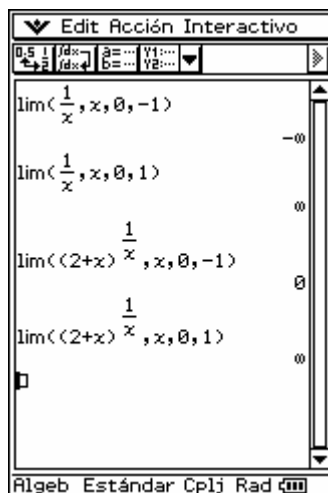
El cálculo de límites se realiza a través de la función **lim** cuya sintaxis es:

$$\mathbf{lim(función, variable, valor)}$$

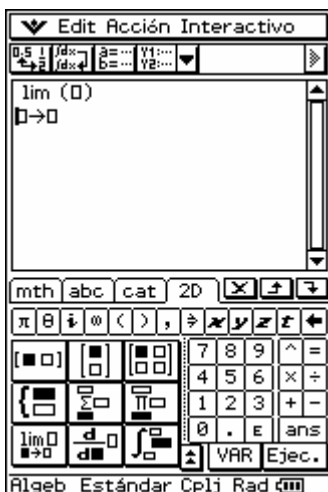


Para calcular límites laterales se utilizará la función anterior, incluyendo un nuevo argumento (1 para límite por la derecha y -1 para límite por la izquierda)

lim(función, variable, valor, 1) lim(función, variable, valor, -1)



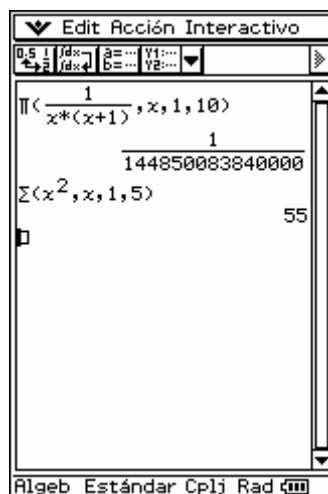
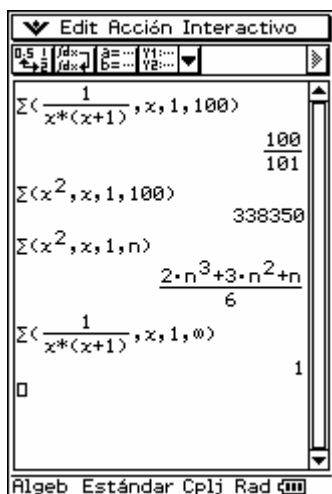
También podemos encontrar esta función en el teclado **2D**.



SUMA Y PRODUCTO DE SERIES

Las funciones \sum y \prod se utilizarán para calcular la suma y el producto, respectivamente de una expresión para los valores indicados.

La sintaxis es similar en las dos funciones ya que admiten como argumentos: la expresión de la función, la variable, el valor inicial y el valor final.

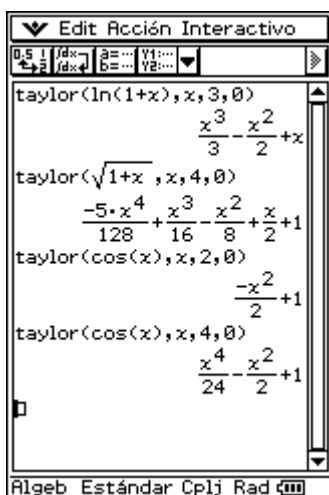


También podemos encontrar estas funciones en el teclado **2D**.

POLINOMIOS DE TAYLOR

Para hallar los polinomios de Taylor de grado n de una función $f(x)$ con respecto a una variable x en el punto $x=a$, emplearemos la función **taylor**, cuya sintaxis es:

$$\mathbf{taylor(f(x), x, n, a)}$$



OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ CÁLCULO

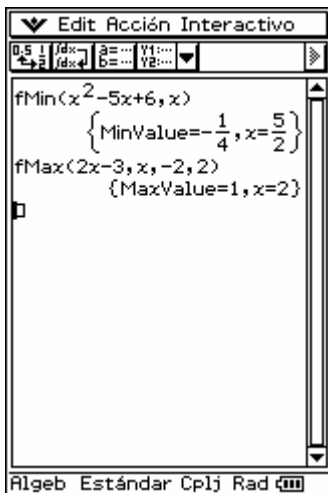
Además, en este menú encontramos las siguientes funciones que relacionamos de manera breve:

- **fMin** y **fMax**: calculan el mínimo y el máximo, respectivamente de una función en un intervalo.

La sintaxis en ambos casos tiene como argumentos: la función, la variable y los extremos del intervalo.

Si se omiten los valores del intervalo los cálculos se realizarán en $(-\infty, +\infty)$.

Estas funciones admiten como último argumento para determinar la precisión en el cálculo (valor entre 1 y 9).

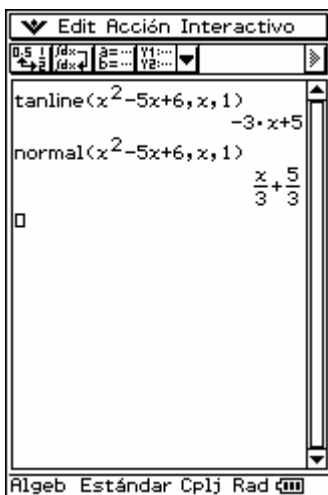


- **tanLine**: devuelve la expresión de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x=a$.

$$\text{tanLine}(f(x),x,a)$$

- **normal**: devuelve la expresión de la recta normal a una función $f(x)$ en un punto $x=a$.

$$\text{normal}(f(x),x,a)$$

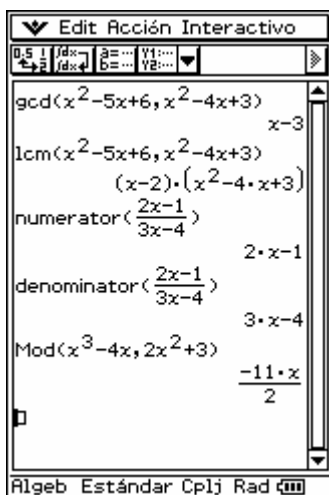


- **arcLen**: halla la longitud del arco de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.

$$\text{arcLen}(f(x), x, a, b)$$

Además se encuentran las siguientes funciones:

- Máximo común divisor: **gcd**.
- Mínimo común múltiplo: **lcm**.
- Denominador de una fracción: **denominator**.
- Numerador de una fracción: **numerator**.
- Resto de una división: **mod**.



Para terminar, indicaremos que la función **rangeAppoint** devuelve una expresión o valor que satisface las condiciones indicadas en un intervalo $[a, b]$, su sintaxis es:

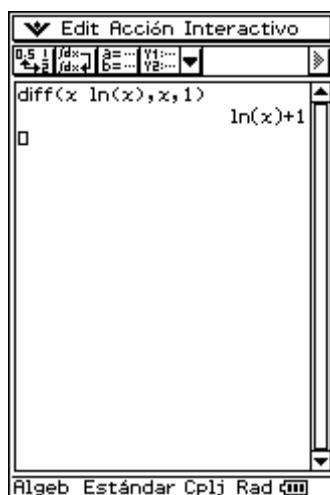
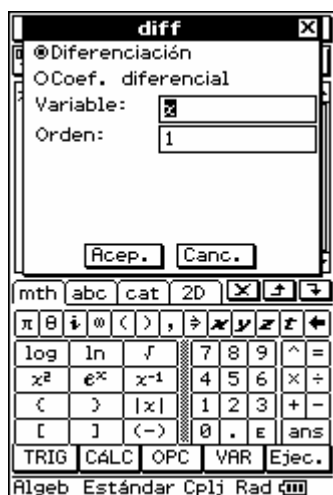
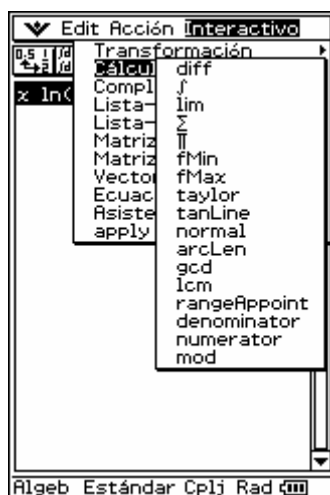
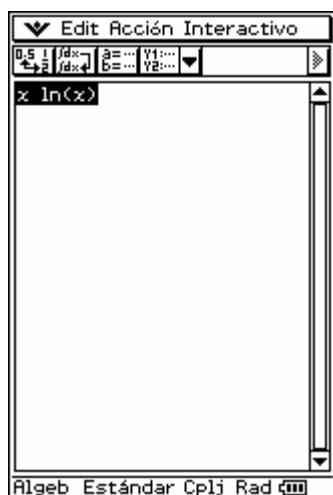
$$\text{rangeAppoint}(\{\text{condición}_1, \text{condición}_2, \dots\}, a, b)$$

En la opción **Interactivo** encontramos un menú con las mismas opciones que han quedado expuestas anteriormente como podemos comprobar en la imagen siguiente:



La diferencia de las opciones de este menú con respecto a las que contiene el menú **Acción** radica en que para aplicar una función del menú **Interactivo** previamente es necesario seleccionar la expresión o el valor sobre el que se aplicará.

Por ejemplo para calcular la función derivada de una expresión contenida en el área de trabajo, comenzaremos seleccionando la expresión pulsando a continuación sobre la opción **diff** del menú **Interactivo**.



ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Simplifica la expresión $\frac{1 - \frac{x}{x-1}}{1 + \frac{x}{x-1}}$

2. Calcula $\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x}{x + 2} + \frac{3}{x^2 - 2x}$

3. Simplifica $\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{6x^3 - 6x}$

4. Desarrolla la expresión $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$.

5. Determina las raíces enteras de los polinomios:

a. $x^3 + 2x^2 + x + 2$

b. $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$

c . d. $6x^5 + 25x^4 - 93x^3 - 404x^2 - 48x + 64$

6. Factoriza el polinomio $2x^5 + 11x^4 + 2x^3 - 51x^2 - 14x + 60$

7. Halla la descomposición en factores primos de 123456 y de 15!.

8. Halla las derivadas de las funciones

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$f(x) = I + \text{tg}\left(x + \frac{I}{x}\right)$$

9. Calcula las derivadas $f^{(3)}$ y $g^{(20)}$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

10. Calcula $\int (x-1) \cos x \, dx$

$$\int \frac{x^3+1}{x-5} \, dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \, dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} \, dx$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \, dx$$

11. Halla $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} \, dx$$

12. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+2 \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{sen} 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$$

13. Halla los límites cuando x tiende a cero por la derecha y por la izquierda de

$$f(x) = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$$

14. Halla los polinomios de Taylor de grados 2, 4 y 8 de la función f en $x=0$.

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

15. Hallar la suma de la serie numérica:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$$